Critère de Weyl

[On trouvera ce développement dans le Oraux X-ENS Analyse 2 (2e édition) p. ????. Attention, il y a une erreur dans le livre !]

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n \overset{\text{def}}{=} \{v_n\} = v_n - \lfloor v_n \rfloor$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1 ▸ $\forall\, [a,b[\subseteq [0,1[,\ X_N(a,b) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \# \{n \in [\![1,N]\!] \mid a \leqslant u_n < b\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a$,

2 ▸ $\forall\, f \in \mathcal{C}^0_{1-\mathrm{p}}$ (continue et 1-périodique), $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} f(u_n) \to \displaystyle\int_0^1 f$,

3 ▸ $\forall\, p \in \mathbb{Z}^*$ *(l'erreur est ici !)*, $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2i\pi p u_n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Le cas échéant, on dit que $(v_n)_n$ est *équirépartie modulo* 1.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{1}_{\dots}$ désigne la fonction indicatrice d'un ensemble, que l'on périodise avec une période 1.

$\boxed{1 ▸ \Rightarrow 2 ▸}$: Remarquons que $N X_N(a,b) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{a \leqslant u_n < b}$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b[} = b-a$. En particulier, $X_N(a,b) \to b-a = \displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b[}$. Ainsi, 2 ▸ est vérifiée pour les indicatrices périodisées, *a fortiori* pour les fonctions en escalier 1-périodiques par linéarité. Soient $f \in \mathcal{C}^0_{1-\mathrm{p}}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe g est escalier 1-périodique telle que $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \int_0^1 f\right| &\leqslant \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - g(u_n)\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(u_n) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 g - f\right| \\
&\leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|f-g\|_\infty + \varepsilon + \int_0^1 \|f-g\|_\infty \\
&\leqslant 3\varepsilon \quad \text{pour } N \text{ assez grand}
\end{aligned}$$

$\boxed{2 ▸ \Rightarrow 3 ▸}$: Soit $p \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{2i\pi p u_n} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\cos(2\pi p\cdot)}_{\in \mathcal{C}^0_{1-\mathrm{p}}}(u_n) + i \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\sin(2\pi p\cdot)}_{\in \mathcal{C}^0_{1-\mathrm{p}}}(u_n) \\
&= \int_0^1 \cos(2\pi p\cdot) + \int_0^1 \sin(2\pi p\cdot) = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{3 ▸ \Rightarrow 2 ▸}$: Soient $f \in \mathcal{C}^0_{1-\mathrm{p}}$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de WEIERSTRASS, il existe T un polynôme trigonométrique tel que $\|f-T\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Or par linéarité, 3 ▸ est vraie pour les polynômes trigonométriques, donc :

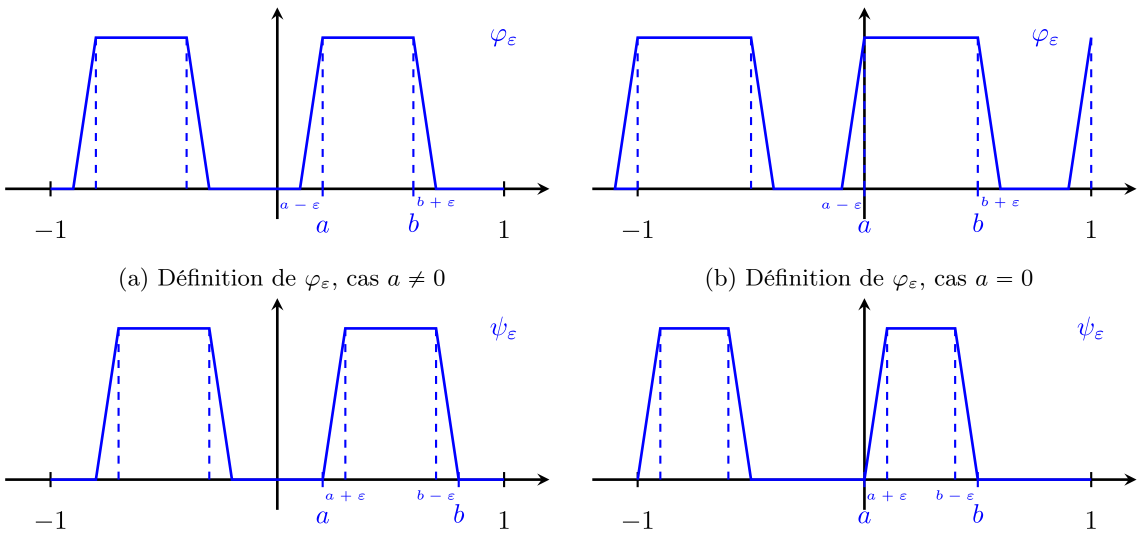
$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \int_0^1 f\right| &\leqslant \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - T(u_n)\right| + \Bigg|\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T(u_n)}_{\to 0} - \underbrace{\int_0^1 T}_{=0}\Bigg| + \left|\int_0^1 T - f\right| \\
&\leqslant \|f-T\|_\infty + \varepsilon + \|f-T\|_\infty \leqslant 3\varepsilon \quad \text{pour } N \text{ assez grand}
\end{aligned}$$

$\boxed{2 \blacktriangleright \Rightarrow 1 \blacktriangleright}$: Soit $[a, b[\subseteq [0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$, définissons des fonctions continues et 1-périodiques qui vont approcher $\mathbb{1}_{[a,b[}$, grâce à la Figure ci-dessous.

On a $\psi_\varepsilon \leqslant \mathbb{1}_{[a,b[} \leqslant \varphi_\varepsilon$, donc $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \psi_\varepsilon(u_n) \leqslant X_N(a, b) \leqslant \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \varphi_\varepsilon(u_n)$, mais par hypothèse :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi_\varepsilon(u_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi_\varepsilon = b - a + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi\varepsilon(u_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} b - a - \varepsilon$$

donc $b - a - \varepsilon \leqslant \liminf\limits_{N\to+\infty} X_N(a, b) \leqslant \limsup\limits_{N\to+\infty} X_N(a, b) \leqslant b - a + \varepsilon$, puis en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient $\lim\limits_{N\to+\infty} X_N(a, b) = b - a$. $\square$



(a) Définition de φ_ε, cas $a \neq 0$

(b) Définition de φ_ε, cas $a = 0$

(c) Définition de ψ_ε, cas $a \neq 0$

(d) Définition de $\psi\varepsilon$, cas $a = 0$

FIGURE 10.1 – Construction d'une approximation continue 1-périodique